

Lista 13

Całki oznaczone, całki niewłaściwe pierwszego i drugiego rodzaju. Zastosowania całek.

Zad 1 Obliczyć całki oznaczone:

$$1) \int_{-1}^1 x^3 dx, \quad 2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx, \quad 3) \int_{-1}^1 x^2 dx, \quad 4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx, \quad 5) \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx,$$
$$6) \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx, \quad 7) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx, \quad 8) \int_1^e \ln x dx$$

Zad 2 Obliczyć całki niewłaściwe:

$$1) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad 2) \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}, \quad 3) \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}, \quad 4) \int_1^{+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx, \quad 5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx, \quad 6) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

Zad 3 Obliczyć pola figur geometrycznych ograniczonych podanymi krzywymi:

$$1) y = x^4, y = 2 - x^2; \quad 2) y = x^2, y = \sqrt{x}; \quad 3) y = 0, y = \sqrt{x}, y = 2 - x;$$
$$4) y = 1, y = \frac{1}{2}x^2, x = 2, x = 4; \quad 5) y = \frac{1}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}, y = 0, x = 1, x = 4;$$
$$6) y = \frac{1}{1+x^2}, y = 0; \quad 7) y = \frac{x}{x^4+1}, y = 0.$$

Zad 4 Wiadomo, że przy produkcji x jednostek pewnego towaru, gdzie $0 \leq x \leq 20$, koszty krańcowe dane są funkcją $K_{kr}(x) = 800 - 4x$. Wiemy, że koszty stałe wynoszą 500 zł. Znaleźć wzór na koszty produkcji x jednostek towaru? Ile wynosi koszt produkcji 10 jednostek?

Zad 5 Przy sprzedaży x jednostek towaru, gdzie $500 \leq x \leq 2500$, utarg krańcowy dany jest wzorem $U_{kr}(x) = 12 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$. Wiadomo, że przy sprzedaży 1000 sztuk utarg wynosi 6700 zł.

Znaleźć utarg ze sprzedaży x jednostek towaru. Ile wyniesie utarg ze sprzedaży 2000 jednostek towaru?

Zad 6 Funkcja popytu na pewien towar ma postać $C_k(x) = 90 - 0,2x + 0,0003x^2$, zaś $C_p(x) = 40 + 0,15x - 0,0002x^2$. ($C_k(x)$ - oznacza cenę dla klientów $C_p(x)$ - oznacza cenę dla producentów za jednostkę towaru przy x jednostkach towaru na rynku). W obu przypadkach $0 \leq x \leq 250$. Przy jakiej cenie popyt i podaż zrównoważą się i ile będą wynosić? Jakie nadwyżki uzyskają klienci oraz producenci?

Zad 7 Firma chemiczna produkuje pewną substancję w procesie ciągłym (równomiernie i bez przerwy). W ciągu tygodnia wytwarza się jej dokładnie 90 000 litrów. Przedsiębiorstwo kupujące substancję odbiera ją cysternami kolejowymi regularnie raz w tygodniu o tej samej porze. Firma ponosi koszty składowania produkowanej substancji. Ze względu na ponoszone koszty stałe oraz koszty pewnych stabilizatorów, koszt magazynowania stałej ilości x litrów substancji przez dokładnie tydzień wynosi $0,02x + 6\sqrt{x} + 2200$ zł. Oczywiście ilość magazynowanej substancji zmienia się stopniowo od 0 do 90 000. Obliczyć całkowite koszty magazynowania substancji przez cały tydzień; od rozpoczęcia jej produkcji aż do jej odbioru.